7/12/17

Ασκήσεις Παραδείγματα

1) Δίνεται ότι μια βάση Gröbner του ιδεώδους $I=\langle x^2+\psi^2+1,\ x^2\psi+2x\psi+x\rangle$ του δακτυλίου $\mathbb{Z}_5[x,\psi]$ ως προς την λεξικογραφική διάταξη με $x>\psi$ είναι η $\{x^2+\psi^2+1,\ x^2\psi+2x\psi+x,\ 3x\psi+4x+\psi^3+\psi,\ 4\psi^5+3\psi^4+\psi^2+\psi+3\}$

Βρείτε την ανάγωγη βάση G του I.

Λύση

Έστω $G=\{g_1=x^2+\psi^2+1,\ g_2=x^2\psi+2x\psi+x,\ g_3=3x\psi+4x+\psi^3+\psi,\ g_4=4\psi^5+3\psi^4+\psi^2+\psi+3\}$

Αρχικά διατάσσω τα g_i (εδώ είναι καλά)

Έχω ότι:

$g_1=x^2+\psi^2+1$ ⇝ ελαχιστική

$\cancel{g_2=x^2\psi+2x\psi+x}$ ⇝ ελαχιστική

! Είναι στο mod 5

$g_3=3x\psi+4x+\psi^3+\psi$ ⇝ όχι ελαχιστική $\xRightarrow{\times 5}$ $g_3=x\psi+3x+2\psi^3+2\psi$ ⇝ ελαχιστική

$g_4=4\psi^5+3\psi^4+\psi^2+\psi+3$ ⇝ όχι ελαχιστική $\xRightarrow{\times 4}$ $g_4=\psi^5+2\psi^4+4\psi^2+4\psi+2$ ⇝ ελαχιστική

Έχω ότι: $\overset{g_1}{x^2} \mid \overset{g_2}{x^2\psi}$ (άρα "πετάω το g_2")

Άρα $G'=\{g_1,g_3,g_4\}$ είναι ελαχιστική βάση Gröbner

Η οποία είναι και ανάγωγη.

Παρατήρηση

Έστω ιδεώδες $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$

Αν ισχύει $f_1 \xrightarrow{f_2} h_1 \rightarrow I = \langle h_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ (δηλ. αντικαθιστώ το f_1)

Αντίστοιχα μπορώ να συνεχίσω τις διαιρέσεις.

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να απλοποιεί το ιδεώδες και να με διευκολύνει στις πράξεις.

21) Έστω η διάταξη $Q(x,\psi,z,w)$ ως διάταξη "lex" με $x > \psi > z > w$. Βρείτε την ανηγμένη βάση Gröbner του $I = \langle x+\psi+z-w,\ x-\psi+2z+w,\ 2x+2\psi-z-2w,\ 3x+\psi+z-w \rangle$ και τέλος ελέγξτε

__Λύση__

Έστω $G = \{g_1 = x+\psi+z-w,\ g_2 = x-\psi+2z+w,\ g_3 = 2x+2\psi-z-2w,\ g_4 = 3x+\psi+z-w\}$

Αρχικά διατάσσω τα g_i (εδώ είναι ήδη διατεταγμένα).

Άρα $I = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$.

Σύμφωνα με την παρατήρηση μπορώ να απλοποιήσω το I, άρα:

$$\cdot\ g_2 \xrightarrow{g_1} x-\psi+2z+w - \frac{x}{x}(x+\psi+z-w) = -\psi+2z+w-\psi-z+w = \overbrace{-2\psi+z+2w}^{h_1}$$

Άρα $I = \langle g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle = \langle g_1, h_1, g_3, g_4 \rangle$.

Μπορώ να απλοποιήσω και άλλο, άρα:

$$\cdot\ g_3 \xrightarrow{g_1} 2x+2\psi-z-2w - \frac{2x}{x}(x+\psi+z-w) = 2\psi-z-2w-2z+2w = -3z$$

! Το $-3z$ μπορώ να το διαιρέσω με $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ και να έχω $z \in I$. Άρα $h_2 = z$

Άρα $I = \langle g_1, h_1, h_2, g_4 \rangle$.

Μπορώ να απλοποιήσω και άλλο, άρα:

$$\cdot\ g_4 \xrightarrow{g_1} 3x+\psi+z-w - \frac{3x}{x}(x+\psi+z-w) = \psi+z-w-3\psi-3z+3w = -2\psi-2z+2w$$

Αντίστοιχα με πριν διαιρώ με -2 και στο I πάει το $\psi+z-w$. Άρα $h_3 = \psi+z-w$

Άρα $I = \langle g_1, h_1, h_2, h_3 \rangle = \langle g_1, -2\psi+z+2w, z, \psi+z-w \rangle$

Μετά το $v_2 = z$ στοιχείο και τα υπόλοιπα τα διαιρώ με το v_2, άρα

$\cdot g_1 \xrightarrow{v_2} x+\psi+z-w - \frac{z}{z} z = x+\psi-w$

$\cdot v_1 \xrightarrow{v_2} -2\psi+z+2w - \frac{z}{z} z = -2\psi+2w \xrightarrow{x(-\frac{1}{2})} \psi - w$

$\cdot v_3 \xrightarrow{v_2} \psi+z-w - \frac{z}{z} z = \psi - w$

Άρα αντικαθιστώ το I σε $I = \langle x+\psi-w, \psi-w, z, \psi-w \rangle = \langle \underset{h_1}{x+\psi-w}, \underset{h_2}{\psi-w}, \underset{h_3}{z} \rangle$

Άρα έχω λοιπόν τη νέα βάση: $H=\{h_1,h_2,h_3\}$ και ελέγχω τα S-πολυώνυμα:

$\cdot S(h_1,h_2) = S(x+\psi-w, \psi-w) \xrightarrow{H} 0$ (Αφού ΜΚΔ$(x,\psi)=1$)

$\cdot S(h_1,h_3) = S(x+\psi-w, z) \xrightarrow{H} 0$ (Αφού ΜΚΔ$(x,z)=1$)

$\cdot S(h_2,h_3) = S(\psi-w, z) \xrightarrow{H} 0$ (Αφού ΜΚΔ$(\psi,z)=1$)

Άρα $H=\{h_1,h_2,h_3\}$ είναι βάση Gröbner

Η οποία είναι και ελαχιστική

Δεν είναι όμως ανηγμένη

Για να την κάνω ανηγμένη θα έχω.

$\cdot h_1 \xrightarrow{(h_2,h_3)} x+\psi-w \xrightarrow{h_2} x+\psi-w - \frac{\psi}{\psi}(\psi-w) = x-w+w = x$

$\cdot h_2 \xrightarrow{(x,h_3)} h_2$ (Αφού δεν διαιρείται ούτε με το x, ούτε με το h_3)

$\cdot h_3 \xrightarrow{(x,h_2)} h_3$ (Αφού δεν διαιρείται ούτε με το x, ούτε με το h_2)

Άρα ανηγμένη βάση Gröbner είναι η $H' = \{x, h_2, h_3\} = \{x, \psi-w, z\}$

Άρα τελικά έχω:

- Ανηγμένη βάση ⟶ $\{x,\psi-w,z\}$.
- Ελαχιστικής βάσεις: ⟶ · $\{x+\psi-w, \psi-w, z\}$

· $\{x,\psi-w,z\}$ ← ! Η ανηγμένη

· $\{x,\psi-w+z,z\}$ ← ! Πρόσθεσα το z

! Παρατήρηση

Μπορώ να βρω άπειρες ελαχιστικές

Μπορώ απλά να προσθέτω όρους που ανήκουν στο ιδεώδες χωρίς όμως να αλλάζει το $Lt(I) = \langle x,\psi,z \rangle$

• Εφαρμογές Βάσεων Gröbner

• Έστω I: ιδεώδες $\subset k[x_1, \dots, x_n]$.
Έστω $f \in k[x_1, \dots, x_n]$

Ερώτημα: $f \in I$;

Απάντηση: Αν G: Βάση Gröbner του $I \Rightarrow f \xrightarrow{G}_+ 0 \Leftrightarrow f \in I$

• Έστω I: ιδεώδες, με $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.
J: ιδεώδες, με $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.

Ερώτημα: $I = J$;

Απάντηση: Έστω G_J: Βάση Gröbner του J.

Αν $f_1 \xrightarrow{G_J}_+ 0 \Rightarrow f_1 \in J$.
Αν $f_1 \xrightarrow{G_J}_+ \neq 0 \Rightarrow f_1 \notin J$.

⋮

Αν $f_i \xrightarrow{G_J}_+ 0 \Rightarrow f_i \in J$.
Αν $f_i \xrightarrow{G_J}_+ \neq 0 \Rightarrow f_i \notin J$.

Αντίστοιχα για την G'_I: Βάση Gröbner του I θα έχω ότι $g_i \in I \vee g_i \notin I$

Αν δηλαδή $f_i \in J \wedge g_i \in I \Rightarrow I = J$.

2ος τρόπος: Έστω G_I: ανηγμένη Βάση Gröbner του I.
Έστω G_J: ανηγμένη Βάση Gröbner του J

Αν $G_I = G_J \Leftrightarrow I = J$

• Έστω $k(x_1,\dots,x_n)/I$: δακτύλιος πηλίκο

Ο δακτύλιος πηλίκο έχει ως στοιχεία σύμπλοκα: $\{f(x_1,\dots,x_n)+I \mid f(x_1,\dots,x_n)\in k(x_1,\dots,x_n)\}$.

Γνωρίζω ότι για τα σύμπλοκα ισχύει:

$(f+I)+(g+I)=(f+g)+I$

$(f+I)\cdot(g+I)=f\cdot g+I$

Ερώτηση: Ξέρω ότι το $f+I$ μπορώ να το γράψω με άπειρους τρόπους (διότι $f+I=h+I$). Υπάρχει βέλτιστος τρόπος γραφής;

Απάντηση: Υπολογίζω τη G: βάση Gröbner του I.

Έπειτα διαιρώ: $f \xrightarrow{G}_+ r$, με r: ανάγωγο modulo G.

Θέτω $r = N_G(f)$.

Τότε $f+I=N_G(f)+I$ και είναι ο βέλτιστος τρόπος γραφής.

Θεώρημα: Έστω $f,g\in k(x_1,\dots,x_n)$. Τότε $f+I=g+I \iff N_G(f)=N_G(g)$.

Συνεπώς $N_G(f)+I$, $f\in k(x_1,\dots,x_n)$ είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων των συμπλόκων του $k(x_1,\dots,x_n)/I$.

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι $f+I=g+I \Rightarrow f-g\in I$.

Έχω ότι:

· $f \xrightarrow{G}_+ N_G(f) \Rightarrow f=h_1g_1+h_2g_2+\dots+h_tg_t+N_G(f)$.

· $g \xrightarrow{G}_+ N_G(g) \Rightarrow g=u_1g_1+u_2g_2+\dots+u_tg_t+N_G(g)$.

Έχω ότι:

· $f-N_G(f)=h_1g_1+\dots+h_tg_t\in I \Rightarrow -f+N_G(f)=-h_1g_1-\dots-h_tg_t \in I$

$g-N_G(g)=u_1g_1+\dots+u_tg_t \in I$ $(+)$

$f-g\in I$

$N_G(f)-N_G(g)\in I$

Άρα έχω δύο περιπτώσεις: 1η: $N_G(f)-N_G(g)=0$

ή 2η: $N_G(f)-N_G(g)\neq 0$.

Έστω $N_G(f)-N_G(g)\neq 0$

Αν $N_G(f) - N_G(g) \neq 0$
$N_G(f) - N_G(g) \in I$ $\Bigg\} \xrightarrow{G:\ \text{βάση Groebner}}$ $\exists\ g_i \in G$ τ.ω. $lm(g_i) \mid lm(N_G(f) ...$

$\rightarrow lm(g_i)$ διαιρεί κάποιον όρο του $N_G(f)$ ή του $N_G(g)$

Άτοπο, αφού $N_G(f), N_G(g)$ ανάγωγα μέσω G

Άρα $N_G(f) - N_G(g) = 0 \Rightarrow N_G(f) = N_G(g)$

$(\Leftarrow)$: Έχω ότι $N_G(f) = N_G(g)$

Άρα ...

- $f \xrightarrow{G}_+ N_G(f) \Rightarrow f = h_1 g_1 + \dots + h_t g_t + N_G(f)$
- $g \xrightarrow{G}_+ N_G(g) \Rightarrow g = u_1 g_1 + \dots + u_t g_t + N_G(g)$

Άρα έχω:

- $f - N_G(f) \in I$
- $g - N_G(g) \in I$ $\Bigg\} \xrightarrow[N_G(f) = N_G(g)]{(-)} f - g \in I \Rightarrow f + I = g + I.$